概率论与数理统计练习题

一、填空题

1、设 A, B, C 是三个事件，且 P(A)=0.7, P(B)=0.3, P(A-B)=0.5, 则 $P(\overline{A}B)=$ 0.1，

$P(\overline{AB})=$ 0.8 .

2、设事件 A,B 互不相容，且 P(A)=p, P(B)=q, 则 $P(A\cup B)=$ p+q

$P(A\overline{B})=$ P(A)=p $P(\overline{A}\overline{B})=$ 1-P(A∪B)=1-p-q

3、设 A,B,C 为三事件，则事件 A,B,C 中恰有一个发生可表示为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$，A,B,C 至少有一个发生可表示为 $A\cup B\cup C$。

4、设每次试验成功的概率为 p $(0<p<1)$，则在 3 次重复试验中至少失败一次的概率为 $1-p^3$.

5、已知 8 只产品中有 2 件次品，从中不放回地抽取两次，每次取一只，则第二次取出的是次品的概率为 $\frac{1}{4}$.

6、设在 n 张彩票中有一张奖券，则第二人摸到奖券的概率为 $\frac{1}{n}$.

7、设随机变量X的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{3}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，则随机变量$X$的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

8、设 X 服从泊松分布，且已知 P(X=1)=P(X=2)，则 P(X=4)= $\frac{2}{3}e^{-2}$.

9、已知随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim\pi(1)$，$Y\sim\pi(2)$，则 X+Y~ $\pi(3)$，P(X+Y=4)= $\frac{27}{8}e^{-3}$.

10、若随机变量 X、Y 相互独立，且 $X\sim b(3,0.35), Y\sim b(6,0.35)$，则 k= 3 时，概率 $P(X+Y=k)$ 取到最大值。

11、已知 X 服从参数为 λ=4 的指数分布，则 $E(X^2)=\frac{2}{\lambda^2}=\frac{1}{8}$，$P(X>E(X))=P(X>\frac{1}{4})=e^{-1}$

12、若随机变量 $(X,Y)\sim N(2,-1,3,6,0), Z=X+Y$，则 $P(-2\le Z\le 4)=2\Phi(1)-1=0.6826$

13、设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 N(1,2)和 N(0,1)，则 $P(X+Y\le 1)=\Phi(\frac{1-1}{\sqrt{3}})=\Phi(0)=\frac{1}{2}$

14、设 $X\sim N(2,\sigma^2)$ 且 $P(2<X<4)=0.3$，则 $P(X\ge 4)=$ 0.2，$P(X<0)=$ 0.2.

15、X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则 Z=max(X,Y)的分

布函数 $F_Z(z)=$ $F_X(3)F_Y(3)$. $P(\min\{X,Y\}\le 3)=$ $1-(1-F_X(3))(1-F_Y(3))$

16、设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=a, E(X^2)=b, c$ 为一常数，则 $D(cX)$= $c^2(b-a^2)$

17、 已知随机变 X 服从区间 [a,b]上的均匀分布,且 $E(X)=3, D(X)=\frac{4}{3}$，则区间[a,b]= [1,5].

18、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1),(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自该总体的一个样本, 则

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布。

19、设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $Var(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，

对 $\forall\varepsilon>0$, 有 $P(|X-\mu|<\varepsilon)>$ $1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

20、若随机变量X服从[−1, b]上的均匀分布，且有切比雪夫不等式

$P(|X-1|<\varepsilon)\ge\frac{2}{3}$, 则b= 3 , $\varepsilon=$ 2 .

21、设 $X\sim N(4,9)$，$Y\sim N(-3,4)$，且 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 独立，则 $2X-Y\sim$ $N(11,40)$；

$D(3X+2Y-7)=$ $9D(X)+4D(Y)=97$

22、二维随机变量(X,Y)具有概率密度为 $f(x,y)$，则 X 的边缘密度函数 $f_X(x)$= $\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$

23、设 X、Y 为两个随机变量，已知 $D(X)=1, D(Y)=4, Cov(X,Y)=1$，则 X 与 Y 的相

关系数 ρ_{XY} = $\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{2}$

24、设随机变量 X 和 Y 独立同分布，都服从标准正态分布 N(0,1)，U=X+Y,V=X-Y,则 U 和 V

的相关系数 ρ_{UV}= 0 . $Cov(U,V)=Cov(X+Y,X-Y)=D(X)-D(Y)=0$

25、若随机变量(X,Y)的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}1&3\\3&16\end{pmatrix}$，则 D(X-Y)= $D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=11$

$Cov(X+2Y,X-Y)=$ $D(X)-2D(Y)+Cov(X,Y)=-28$

26、设 $X_1,X_2,\cdots X_{600}$ 相互独立，且均在 (0, 1) 上服从均匀分布，则由中心极限定理有

$P\left(\sum_{i=1}^{600}X_i>300\right)\approx$ $1-\Phi(0)=\frac{1}{2}$ $X=\sum_{i=1}^{600}X_i$ $E(X)=300$

$D(X)=50$

27、正态分布 $N(3,\sigma^2)$ 的中位数 $x_{0.5}=$ 3 .

28、 设总体 X～N（1,4），$X_1,\cdots X_{100}$ 是来自 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，已知

$Y=a\overline{X}+b\sim N(0,1)$, a>0, 则 a=___5___, b=___-5___.

29、 当随机变量 $t\sim t(n)$ 时，称满足 $P(t\geq t_\alpha(n))=$ ___α___ 的 $t_\alpha(n)$ 是自由度为 n 的 t 分布的上 α 分位数.

30、设 $X_1,\cdots X_{10}$ 是取自正态总体 $N(0,0.3^2)$，则 $P(-1.2<\overline{X}<1.5)=$ ___$\Phi(5\sqrt{10})$___ $-\Phi(-4\sqrt{10})=1$

$E(\overline{X})=$ ___0___, $D(\overline{X})=$ ___9×10^{-3}___, $E(S^2)=$ ___0.09___, $D(S^2)=$ ___$\frac{2}{n-1}\sigma^4$___ $=1.8\times10^{-3}$

$P(\frac{1}{2}\times0.3^2<\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2<2\times0.3^2)=$ ______. （查表计算）

31、设 $X_1,\cdots X_4$ 是取自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，则 $a=$ ___$\frac{1}{20}$___, $b=$ ___$\frac{1}{100}$___ 时，

$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 服从 χ^2 分布，自由度为 ___2___。

32、设随机变量 $X\sim t(n)$, (n>1), 则 $X^2\sim$ ___$F(1,n)$___, $\frac{1}{X^2}\sim$ ___$F(n,1)$___

$X_1+X_2\sim N(0,2)$

$X_3^2+X_4^2\sim\chi^2(2)$

33、若 $X_1,\cdots X_4$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，则随机变量 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}\sim$ ___$t(2)$___

$D(X)=3$

34、 设总体 X 服从正态分布，且 $E(X)=-1$, $E(X^2)=4$, $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则样本均值 $\overline{X}\sim$ ___$N(-1,\frac{3}{n})$___

35、 设总体 X～N（1,4），$X_1,\cdots X_{100}$ 是来自 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则

$\overline{X}\sim$ ___$N(1,\cancel{25})$___ $1/25$

36、设 $X_1,\cdots X_{16}$ 是来自 N(8,4)的简单随机样本，则 $p(\min\{X_1,X_2\cdots X_{16}>5)=$ ___$[1-\Phi(\frac{5-8}{2})]^{16}$___ $=[\Phi(1.5$

$p(\max\{X_1,X_2\cdots X_{16}\}>10)=$ ___$1-[\Phi(\frac{10-8}{2})]^{16}$___ $=1-0.8413^{16}$ $=0.9332^{1}$

37、 设 $X_1,X_2,\cdots X_{21}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots Y_5$ 分别取自两个独立正态总体 N(1,4) 与 N(2, 1)，S_1^2 与 S_2^2 分别是两个样本的样本方差，令 $K_1=aS_1^2, K_2=(a+b)S_2^2$，已知 $K_1\sim\chi^2(20)$, $K_2\sim\chi^2(4)$, 则 a=___5___, b=___-1___

$K_1=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}=5S_1^2\sim\chi^2(20)$

$K_2=\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}=4S_2^2\sim\chi^2(4)$

38、设总体 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布总体 N（0, 9), 而 $X_1,X_2,\cdots X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_9$

分别来自 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $U=\dfrac{\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{9}Y_j^2}}$ 服从 t 分布，自由度为 9.

39、设总体 X 服从正态分布，$N(\mu,\sigma^2)$，X_1,X_2,X_3 为其样本，则当常数 $a=\frac{1}{2}$

时，$\hat{\mu}=\frac{1}{3}X_1+aX_2+\frac{1}{6}X_3$ 是未知参数 μ 的无偏估计.

$E(\hat{\theta}^2)=C\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2$

$=2(n-1)C\sigma^2=\sigma^2$

40、设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为总体 X 的一个随机样本，$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$，

$\hat{\theta}^2=C\Sigma_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计，则 C= $\frac{1}{2(n-1)}$

$E(X_{i+1}-X_i)=0$

41、对任一总体而言，样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计.

$D(X_{i+1}-X_i)=2\sigma^2$

42、.若参数 θ 有两个无偏估计 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$，它们的方差对一切 $\theta\in\Theta$ 有 $D(\hat{\theta}_1)$ $\le$ $D(\hat{\theta}_2)$，则称

估计 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

43、 设 $\theta\in\Theta$ 为未知参数，$\hat{\theta}_n=\theta_n(x_1,\cdots,x_n)$ 是 θ 的一个估计量，n 是样本容量，若对任

何一个 ε >0, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|\theta_n-\theta|>\varepsilon\}=0$，则称 $\hat{\theta}_n$ 是参数 θ 的 相合 估计

44、设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)} & x\ge\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$，且 $X_1,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机

样本，则未知参数 θ 的矩估计量为 $\bar{X}-1$.

45、设总体 $X\sim B(n,p),0<p<1,X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为其子样，n 及 p 的矩估计分别是 $\hat{p}=\frac{\bar{X}-B_2}{\bar{X}}$，$\hat{n}=$ $\bar{X}$

46、设总体 $X\sim U(0,\theta),(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是来自 X 的样本，则 θ 的极大似然估计量是 $\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$

47、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 为未知参数，$X_1,\cdots X_n$ 是取自正态总体 X 的简单随机样

本，$\bar{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+$

48、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots X_n$ 是取自 X 的简单随机样本， 则方差 σ^2 的置信水平

为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

49、设总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随即变量，均值 $\bar{x}=5$ 则未知参数 μ 的置信度

为 0.95 的置信区间是 $[\bar{x}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}]$ （已知 $u_{0.025}=1.96$）

$=[5\pm0.588]$

$=[4.412,5.588]$

50、在假设检验中，记 H_0 为原假设，H_1 为备择假设，则称 H0为真拒绝H0 为犯第一类错误.

51、设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的样本，则检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，当 σ^2 为已知时用统计量是 $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$；当 σ^2 未知时检验统计量是 $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$。

52、设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 为未知参数，从 X 中抽取的容量为 n 的样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，在显著性水平 α 下，检验假设 $H_0:\mu=80$，$H_1:\mu\neq 80$ 的拒绝域为 $\left|\frac{\bar{x}-80}{s/\sqrt{n}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

53、 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知，$X_1,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的样本，假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$ 所使用的统计量是 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$. 若给定显著性水平 α，则拒绝域为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

二、计算和证明题

1．两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率为 0.03，第二台出现不合格品的概率为 0.06，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍。（1）求任取一个零件是合格品的概率；

(2) 如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

2、口袋中装有 10 枚硬币，其中 4 枚废品（即两面都是国徽），先从口袋中随机的取出一枚硬币，并将它独立的抛两次，（1）求向上的一面全是国徽的概率；（2）若发现向上的一面全是国徽，求这枚硬币是废品的概率。

3、设随机变量 X~U(0,3),求随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度函数

二、计算和证明题

1．两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率为 0.03，第二台出现不合格品的概率为 0.06，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍。（1）求任取一个零件是合格品的概率；

(2) 如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

B_i = {任取一件，取到第i台生产的零件} i=1,2

A = {任取一件，取到合格品} 则 $P(B_1)=\frac{2}{3}$，$P(B_2)=\frac{1}{3}$

$P(A|B_1)=0.97$. $P(A|B_2)=1-0.06=0.94$

(1) $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$

$=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.94=0.96$

$P(\bar{A})=1-0.96=0.04$

(2) $P(B_2|\bar{A})=\frac{P(B_2)P(\bar{A}|B_2)}{P(\bar{A})}=\frac{\frac{1}{3}\times0.06}{0.04}=\frac{1}{2}$

2、口袋中装有 10 枚硬币，其中 4 枚废品（即两面都是国徽），先从口袋中随机的取出一枚硬币，并将它独立的抛两次，（1）求向上的一面全是国徽的概率；（2）若发现向上的一面全是国徽，求这枚硬币是废品的概率。

B_1 = {这枚硬币是正品} B_2 = {废品} A = {抛两次全国徽}

$P(B_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ $P(B_2)=\frac{2}{5}$ $P(A|B_1)=(\frac{1}{2})^2$ $P(A|B_2)=1^2$

(1) $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times1=\frac{11}{20}$

(2) $P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\times1}{\frac{11}{20}}=\frac{8}{11}$

3、设随机变量 X~U(0,3),求随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度函数

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 0<x<3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})) & y>0\\ 0 & y\le0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{6\sqrt{y}} & 0<y<9\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

4、设 X 与 Y 独立，且 X～U(0,1)，Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$.

求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

5、(1)设随机变量 $X\sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 求 Y=sinX 的密度函数。

(2)设随机变量 X~N(1,9)，Y~N(-1,4),且 X 与 Y 相互独立，求 P(X -2Y)>3)

(1) $f_X(x)=\begin{cases}\pi & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\arcsin y)(\arcsin y)' & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}} & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(2) $X-2Y\sim N(3,25)$

$P(X-2Y>3)=1-\Phi(\frac{3-3}{5})$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

10. 根据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布．现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的．求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率．(已知 $\Phi(0.8)=0.7881$)

11. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$\overline{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差。（1）求样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 的联合分布律；

（2）求 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布律；（3）求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$

(1) $\because X\sim\pi(\lambda)$ $\therefore P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\ x=0,1,2,\cdots$

$(x_1\cdots x_n)$ 的联合分布率为

$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$

$=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!\,x_2!\cdots x_n!}e^{-n\lambda}$ $x_i=0,1,2,\cdots,\ i=1,2,\cdots,n$

(2) 由泊松分布的可加性知 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\pi(n\lambda)$

$\therefore Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布率为

$P(\sum_{i=1}^{n}X_i=k)=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$ $k=0,1,2,\cdots$

(3) $E(\overline{X})=E(X)=\lambda$

$D(\overline{X})=\frac{1}{n}D(X)=\frac{\lambda}{n}$

$E(S^2)=D(X)=\lambda$

12、设总体 X 的密度函数为 $f(x,\ \theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$\theta>-1$ 未知，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自总体 $\boldsymbol{X}$ 的样本，$x_1,x_2,\cdots x_n$ 为相应的样本值，求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

13、设总体 $X\sim N(2,\sigma^2)$，它的概率密度函数为 $f(x;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

其中 σ^2 为未知参数. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本

(1) 求 σ^2 的极大似然估计量 $\hat{\sigma}_1^2$；　　(2) 求 σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_2^2$.

(3) 证明 $\hat{\sigma}_1^2$ 是 σ^2 的无偏、相合估计；

(1) 似然函数为

$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma^2)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$

$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

(2) $E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\sigma^2$

$\therefore \sigma^2=\mu_2$

σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_2^2=A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

(3) $E(\hat{\sigma}_1^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\sigma^2$

$\therefore \hat{\sigma}_1^2$ 是 σ^2 的无偏估计

由辛钦大数定律知

$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\to E(X_i^2)=\sigma^2$

$\therefore \hat{\sigma}_1^2$ 是 σ^2 的相合估计量.

14．设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<0.5)$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值 3，1，3，3，0，1，2，3，求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

(1) $E(X)=0\times\theta^2+1\cdot 2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta)$

$=3-4\theta=\mu_1$

$\therefore \theta=\frac{3-\mu_1}{4}$，$\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{3-\bar{X}}{4}$

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=2$，$\theta$ 的矩估计值为 $\frac{1}{4}$．

(2) $L(\theta)=P(X_1=3,X_2=1,\cdots X_8=3)$

$=8\theta^5(1-\theta)^3(1-2\theta)^4$

$\ln L(\theta)=\ln 8+5\ln\theta+3\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{3}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0$

$24\theta^2-26\theta+5=0$．$\hat{\theta}_1=\frac{1}{4}$，$\hat{\theta}_2=\frac{5}{6}$(舍)．

15.从一批灯泡中随机抽取 5 只作寿命试验，测得寿命 X（单位：小时）如下：

1050，1100，1120，1250，1280

设灯泡寿命服从正态分布．求均值 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限．

（$t_{0.05}(4)=2.132, t_{0.025}(4)=2.776$）

16.某种零件的长度服从正态分布，方差 $\sigma^2=1.21$，随机抽取 6 件，记录其长度（毫米）．32.46，31.54，30.10，29.76，31.67，31.23　问：当显著性水平 $\alpha=0.01$ 时，能否认为这批零件的平均长度为 32.50 毫米．

17.从某种试验物中取出 24 个样品，测量其发热量，算得平均值 $\bar{x}=11958$，样本均方差 $S=316$．设发热量服从正态分布，问是否可认为该试验物发热量的期望值为 12100（$\alpha=0.05$）．